

## Klausuraufgaben und Lösungen zur Analysis I, II für Wirtschaftsinformatiker, WS 2005/06, 17. Februar 2006

**Aufgabe 1:** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} 1/k = \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k. \quad 6 \text{ Punkte.}$$

**Lösung:**  $n = 1$  : l.S.  $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ; r.S.  $= \frac{1}{2}$ .

Schluss von  $n$  auf  $n + 1$  :

$$\begin{aligned} \text{r.S.} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} 1/k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} 1/k + (-1)^{2n+1+1} 1/(2n+1) + (-1)^{2n+2+1} 1/(2n+2) \\ &= (\text{gemäss Induktionsannahme}) = \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} 1/k - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=n+2}^{2n+1} 1/k + \frac{2-1}{2n+2} = \text{l.S.} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + n} / (n + 1)) \quad 6 \text{ Punkte.}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x \ln(1 + 1/x)). \quad 6 \text{ Punkte.}$

**Lösung:** a)  $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1} = \frac{n^{2/3} \sqrt[3]{1+1/n}}{n(1+1/n)} = n^{-1/3} \frac{\sqrt[3]{1+1/n}}{1+1/n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

b)  $x \ln(1 + 1/x) = \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = (\text{Substitution von } t := 1/x \text{ ergibt}) = \ln(1+t)/t \Rightarrow$   
 $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)/t = (\text{Fall } 0/0 \text{ für de l'Hospital}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/(1+t)}{1} = 1.$  Daraus folgt:  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x \ln(1 + 1/x)) = 0.$

**Aufgabe 3:** Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a)  $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \ln(n)). \quad 6 \text{ Punkte.}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/(n^2+1). \quad 6 \text{ Punkte.}$

**Lösung:** a)  $f(x) := 1/(x \ln(x)) \geq 0$  und monoton fallend für  $x \geq 2$ .

Integralkriterium  $\Rightarrow \int_2^{\infty} dx/(x \ln(x)) \leq \sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \ln(n)).$

$\int_2^b 1/(x \ln(x)) dx = (\text{Substitution } u := \ln(x), du = 1/x dx \text{ liefert}) = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} du/u =$   
 $\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)) \rightarrow \infty$  für  $b \rightarrow \infty \Rightarrow$  Die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \ln(n))$  ist divergent.

b)  $\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1/(n+1).$

$\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1) =$  harmonische Reihe, die divergent ist.  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/(n^2+1)$  hat eine divergente Minorante, ist also selbst divergent.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} (\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1)/(x^2 + y^2) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

an der Stelle  $(0, 0)$  stetig ist.

*Hinweis:* Es gilt  $x^2 \leq x^2 + y^2$  !

6 Punkte.

**Lösung:** Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f(x, y) = (\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1)/(x^2 + y^2) \geq 0.$   $f(x, y) =$   
 $(x^2 y^2 + 1 - 1)/((x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1)) \leq$  (Vergrößerung im Zähler von  $x^2$  zu  $x^2 + y^2$

ergibt  $) = (x^2 + y^2)y^2 / ((x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1)) = y^2 / (\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1) \implies 0 \leq f(x, y) \leq y^2 / (\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1) \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \implies f$  stetig im Ursprung.

**Aufgabe 5:** Sei die Kurve  $r(\varphi) := 1 + \cos(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  in Polarkoordinaten gegeben.

a) Bestimmen Sie die Symmetrie(n) der Kurve.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$ . 12 Punkte.

**Lösung:** a)  $r(-\varphi) = r(\varphi) \implies$  die Kurve ist symmetrisch zur  $x$ -Achse.

b) Bogenlänge  $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos(\varphi))^2 + (-\sin(\varphi))^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos(\varphi)} d\varphi =$  ( Da gilt  $1 + \cos(\varphi) = 2\cos^2(\varphi/2)$  folgt  $) = 2 \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi/2)| d\varphi = 4 \int_0^\pi \cos(\varphi/2) d\varphi = 8 \sin(\varphi/2)|_0^\pi = 8$ .

**Aufgabe 6:** Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$ . 8 Punkte.

**Lösung:**  $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^3 e^{-x^2} dx$ . Es gilt:  $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{2}e^{-x^2}) = xe^{-x^2}$ .

$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 (xe^{-x^2}) dx = x^2(-\frac{1}{2}e^{-x^2}) - \int 2x(-\frac{1}{2}e^{-x^2}) dx = x^2(-\frac{1}{2}e^{-x^2}) + (-\frac{1}{2}e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1)$   
 $\implies \int_0^b x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-b^2}(b^2 + 1) \longrightarrow \frac{1}{2}$  für  $b \longrightarrow \infty$ .

**Aufgabe 7:** Integrieren Sie die folgende rationale Funktion:

$$r(x) := (x^2 + 11x + 40)/(x^3 + 5x^2 + 17x + 13)$$

*Hinweis:* Der Nenner hat eine ganzzahlige Nullstelle (Diese ist bekanntlich Teiler des konstanten Koeffizienten 13.). 12 Punkte.

**Lösung:**  $-1$  ist Nullstelle des Nennerpolynoms. Hornerschema zur Division:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & 17 & 13 \\ 0 & -1 & -4 & -13 \\ \hline 1 & 4 & 13 & 0 \end{array}$$

Folglich:  $x^3 + 5x^2 + 17x + 13 = (x + 1)(x^2 + 4x + 13)$

$4^2 - 4 \cdot 13 = 4(4 - 13) < 0$ , d.h. das quadratische Polynom hat **keine** reellen Nullstellen.

$r(x) = c/(x + 1) + (d + ex)/(x^2 + 4x + 13) = (cx^2 + 4cx + 13c + dx + ex^2 + d + ex)/((x + 1)(x^2 + 4x + 13))$ .

Koeffizientenvergleich für das Zählerpolynom:

$$x^2: \quad 1 = c + e; \quad \implies e = 1 - c;$$

$$x: \quad 11 = 4c + d + e;$$

$$1: \quad 40 = 13c + d; \quad \implies$$

$$3c + d = 10; \quad 13c + d = 40; \quad \implies 10c = 30; \quad c = 3; \quad e = -2; \quad d = 1;$$

$$\int r(x) dx = \int 3/(x + 1) dx + \int (1 - 2x)/(x^2 + 4x + 13) dx.$$

$$\int 3/(x + 1) dx = 3 \ln(|x + 1|).$$

$$\int (1 - 2x)/(x^2 + 4x + 13) dx =$$

$$- \underbrace{\int (2x + 4)/(x^2 + 4x + 13) dx}_{A :=} + 5 \underbrace{\int dx/(x^2 + 4x + 13)}_{B :=}.$$

$A =$  (Man substituiere  $u := x^2 + 4x + 13$ ,  $du = (2x + 4) dx$  und erhält damit)  $= \ln(x^2 + 4x + 13)$ .

$B = \int dx / ((x+2)^2 + 9) = \frac{1}{9} \int dx / ((\frac{x+2}{3})^2 + 1) =$  (Man substituiere  $u := (x+2)/3$ ,  $du = \frac{1}{3} dx$  und erhält damit)  $= \frac{1}{3} \int 1/(1 + u^2) du = \frac{1}{3} \arctan(\frac{x+2}{3})$ .  
 $\implies \int r(x) dx = 3 \ln(|1 + x|) - \ln(x^2 + 4x + 13) + \frac{5}{3} \arctan(\frac{x+2}{3})$ .

**Aufgabe 8:** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + 10y = 85 \sin(x) + 50x.$$

für die Anfangswerte  $y(0) := 4$ ,  $y'(0) := 0$ .

12 Punkte.

**Lösung:** Homogene DGL:

Charakteristisches Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$ .

Nullstellen:  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 40}) = 1 \pm 3i$ .

Fundamentalsystem der homogenen DGL:  $e^x \sin(3x), e^x \cos(3x)$ .

Ansatz für partikuläre Lösung ( $P(i) \neq 0, P(0) \neq 0$ ):

$$y = A \sin(x) + B \cos(x) + C + Dx;$$

$$y' = A \cos(x) - B \sin(x) + D;$$

$$y'' = -A \cos(x) - B \sin(x);$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL:

$$-A \sin(x) - B \cos(x) - 2A \cos(x) + 2B \sin(x) - 2D + 10A \sin(x) + 10B \cos(x) + 10C + 10Dx = 85 \sin(x) + 50x.$$

Koeffizientenvergleich:

$$1 : 0 = 10C - 2D;$$

$$x : 50 = 10D; \implies D = 5, C = 1.$$

$$\sin(x) : 85 = -A + 2B + 10A;$$

$$\cos(x) : 0 = -B - 2A + 10B;$$

$$\implies 9A + 2B = 85; \quad -2A + 9B = 0. \implies A = \frac{9}{2}B \text{ Aus } \frac{81}{2}B + \frac{4}{2}B = 85 \text{ folgt } B = 2, \quad A = 9.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + 9 \sin(x) + 2 \cos(x) + 1 + 5x.$$

Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$$y(0) = 4 = C_1 + 2 + 1; \implies C_1 = 1.$$

$$y'(0) = 0 = C_1 + 3C_2 + 9 + 5. \implies C_2 = -5.$$

$\implies$  Lösung des Anfangswertproblems:

$$y = e^x \cos(3x) - 5e^x \sin(3x) + 9 \sin(x) + 2 \cos(x) + 1 + 5x.$$

**Aufgabe 9:** Bestimmen Sie alle stationären Punkte und deren Typ (d.h. ob ein lokales Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt) der Funktion  $f(x, y) := 2x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$ . Hat die Funktion Extrema? 10 Punkte.

**Lösung:**  $\nabla f = (6x^2 + y^2 + 12x, 2xy + 2y)$ .

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff 6x^2 + y^2 + 12x = 0 \text{ und } 2xy + 2y = 0.$$

$$2y(x + 1) = 0 \implies y = 0 \text{ oder } x = -1.$$

a)  $y = 0 : 6x^2 + 12x = 0 \implies 6x(x + 2) \implies x = 0 \text{ oder } x = -2.$

$\implies$  stationäre Punkte:  $(0, 0), (-2, 0).$

b)  $x = -1 : 6 + y^2 - 12 = 0 \implies y = \pm\sqrt{6}.$

$\implies$  weitere stationäre Punkte:  $(-1, \sqrt{6}), (-1, -\sqrt{6}).$

Typ der stationären Punkte: Hesse-Matrix  $H = \begin{pmatrix} 12x + 12 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$

$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$  lokales Minimum !

$H(-2, 0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies$  lokales Maximum !

$H(-1, \sqrt{6}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \implies$  Sattelpunkt !

$H(-1, -\sqrt{6}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \implies$  Sattelpunkt !

Die Funktion hat keine Extrema, weil  $f(x, 0) = 2x^3 + 6x^2 \rightarrow \pm\infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty.$

**Aufgabe 10:** Berechnen Sie das Minimum der Funktion  $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y, z) := x - 2y + 3z - 14 = 0.$  Hat  $f$  ein Maximum? 10 Punkte.

**Lösungsvariante 1:**  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$

Nebenbedingung:  $g(x, y, z) = x - 2y + 3z - 14 = 0.$

$\nabla g = (1, -2, 3) \neq (0, 0, 0) \implies \nabla f = \lambda g$

$\implies 2x = \lambda, \quad 2y = -2\lambda, \quad 2z = 3\lambda \implies \lambda = 2x, \quad \lambda = -y, \quad \lambda = \frac{2}{3}z \implies x = -\frac{1}{2}y, z = -\frac{3}{2}y.$

Eingesetzt in Nebenbedingung:

$-\frac{1}{2}y - 2y - \frac{9}{2}y = 14 \implies y = -2, \quad x = 1, \quad z = 3. \implies$  Minimum =  $f(1, -2, 3) = 1 + 4 + 9 = 14.$

$f$  hat kein Maximum unter der Nebenbedingung, da sie beliebig grosse  $x, y, z$  zulässt.

**Lösungsvariante 2:** Man löse die Nebenbedingung z.B. nach  $x$  auf, d.h. man setzt  $x = 14 + 2y - 3z$  in  $f$  ein und erhält eine neue Funktion  $h(x, y) := f(14 + 2y - 3z, y, z) = 196 + 56y - 84z + 5y^2 - 12yz + 10z^2$  deren Minimum man bestimmt:

$\nabla h = (56 + 10y - 12z, -84 - 12y + 20z) = (0, 0).$  Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert wieder das schon in (1) berechnete Ergebnis.